

Cohomologie feuilletée du flot affine de Reeb sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$



AZIZ EL KACIMI ALAOU

Résumé

On calcule explicitement la cohomologie feuilletée $H_{\mathcal{F}}^*(M)$ du flot affine de Reeb \mathcal{F} sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. L'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^1(M)$ contient exactement les obstructions à la résolution de l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ et permet de décrire l'espace des distributions invariantes par tout champ X non singulier définissant le feuilletage \mathcal{F} .

MSC 2010. Primary : 53C12 ; Secondary : 20G10.

1 Introduction

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension n sur une variété différentiable M (connexe). Une forme différentielle ω sur M est dite *basique* si elle vérifie $i_X\omega = 0$ et $L_X\omega = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à \mathcal{F} . Localement, ω est la relevée d'une forme différentielle sur la variété des plaques. On peut donc l'interpréter comme une "forme différentielle sur l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ ". Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p$ des germes de p -formes basiques n'est pas fin et permet de définir une théorie de cohomologie $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p)$, en général non triviale, qu'on appelle *cohomologie bigraduée* de la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) . Elle est le terme E_1^{p*} de la suite spectrale (E_r) associée à la résolution de de Rham transverse :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^n \longrightarrow 0$$

du faisceau constant \mathbb{R} sur M . C'est l'analogue pour \mathcal{F} de la version différentiable de la suite spectrale de Leray-Serre d'une fibration localement triviale (exposée de façon magnifique dans le livre de Bott et Tu [2]). La cohomologie bigraduée est apparue pour la première fois dans les travaux de Reinhart [14]. Depuis lors, divers auteurs l'ont étudiée sous des aspects variés. Vaisman [18] a donné une résolution fine du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p$ en termes de certaines formes différentielles. Dans sa thèse [16], Sarkaria a relié cette cohomologie aux classes caractéristiques des fibrés en droites complexes. Des applications aux déformations des feuilletages ont été données par Duchamp et Kalka [3] dans le cas holomorphe, par Girbau, Haefliger et Sundararaman [7] dans le cas transversalement holomorphe et par Hamilton [10] dans le cas différentiable (tout court). Des résultats ont été aussi obtenus par Roger [15] et Mostow [13]. Sous un angle un peu différent, le même type de cohomologie a été utilisé par Molino [12] pour lire les obstructions à l'existence de connexions basiques.

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^0$ sera noté simplement $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ est appelée *cohomologie feuilletée* de la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) . C'est un invariant important du feuilletage. Par exemple, le dual topologique de l'espace $H^m(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ (m est la dimension de \mathcal{F}) contient les *cycles feuilletés* au sens de Sullivan [17] et donc les *mesures transverses invariantes* (cf. [5]). Dans [5] sont aussi établies certaines de ses propriétés telles que l'invariance par *homotopie intégrable* et des méthodes de calcul, par exemple la suite exacte de Mayer-Vietoris. Jusqu'à la fin des années 70 on ne disposait d'aucun calcul explicite à part celui des feuilletages linéaires du tore \mathbb{T}^2 qui a été fait partiellement par Reinhart [14] (les méthodes reposant sur la notion de "petit dénominateur" qui remonte déjà à certains travaux de Poincaré.) Mais depuis les années 80 les choses ont avancé et beaucoup de calculs explicites ont été faits, par exemple dans [6] et ceux qu'on trouve récemment dans [11] et [1] où la cohomologie feuilletée a été utilisée dans l'étude de la rigidité de certaines actions localement libres de groupes de Lie.

Mais le calcul de $H_{\mathcal{F}}^*(M)$ reste toujours assez ardu. Il n'y a vraiment pas de méthode générale permettant de le faire : on regarde pas à pas et, pour chaque exemple, on adopte telle ou telle démarche particulière. C'est un

peu le cas de l'exemple du flot affine de Reeb sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ qu'on traite dans cet article. Il a fallu user d'un peu de tout (topologie algébrique, algèbre homologique, analyse fonctionnelle...) pour mener à bien le calcul. Et on y arrive!

2 Rappels

Dans cette section, on définit les principales notions considérées dans ce texte : celle de feuilletage, de cohomologie feuilletée, de suite spectrale d'un revêtement... Tous les objets géométriques (variétés, fonctions, champs de vecteurs, formes différentielles...) seront supposés de classe C^∞ . Et sauf mention expresse du contraire, les fonctions et les formes différentielles seront à valeurs complexes.

Definition 2.1. Soit M une variété (connexe) de dimension $m+n$. Un *feuilletage* \mathcal{F} de *codimension* n (ou de *dimension* m) sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ et, pour tout i , d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ et $y' = \gamma_{ij}(y)$.

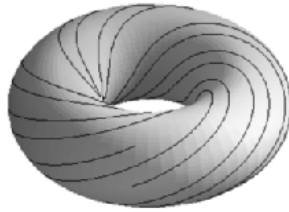
On peut aussi voir \mathcal{F} comme la donnée d'un sous-fibré τ de rang m du fibré tangent TM *complètement intégrable*, c'est-à-dire, pour toutes sections $X, Y \in C^\infty(\tau)$ de τ (*i.e.* des champs de vecteurs sur M tangents à τ), le crochet $[X, Y]$ est encore une section de τ . Les sous-variétés connexes maximales tangentes à τ sont appelées *feuilles* de \mathcal{F} .

2.1 Exemples

Ce n'est pas ce qui manque, la théorie des feuilletages en est riche. Mais nous n'en donnerons que deux, à la fois assez importants et de description relativement facile.

i) Le feuilletage linéaire sur le tore \mathbb{T}^2 .

Soit $\tilde{M} = \mathbb{R}^2$ et considérons l'équation différentielle linéaire $dy - \alpha dx = 0$ où α est un nombre réel. Elle a pour solution générale $y = \alpha x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$; cette solution est une fonction linéaire dont le graphe est une droite F_c . Lorsque c varie dans \mathbb{R} , on obtient une famille de droites parallèles qui remplit le plan \tilde{M} et qui y définit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ (ses feuilles sont les droites F_c). L'action naturelle de \mathbb{Z}^2 sur \tilde{M} préserve $\tilde{\mathcal{F}}$ (*i.e.* l'image de chaque feuille \tilde{F} par une translation entière est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$). Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ induit alors un feuilletage \mathcal{F} sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Les feuilles de \mathcal{F} sont toutes difféomorphes au cercle \mathbb{S}^1 si α est rationnel et à la droite réelle sinon (comme on le voit sur le dessin ci-dessous). En fait si α n'est pas rationnel, toute feuille de \mathcal{F} est dense; ceci montre que même si, localement, un feuilletage est simple, sa structure globale peut être un peu compliquée.



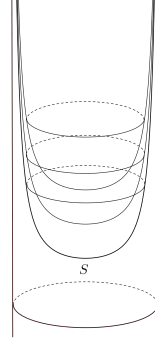
ii) Le feuilletage de Reeb sur la 3-sphère.

Soit M la sphère \mathbb{S}^3 vue comme suit dans \mathbb{C}^2 : $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On note \mathbb{D} le disque unité ouvert de \mathbb{C} et $\bar{\mathbb{D}}$ son adhérence (qui est le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$). Les deux ensembles $M_+ = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$ et $M_- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\}$ sont difféomorphes à $\bar{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, ont le tore \mathbb{T}^2 comme bord commun :

$$\mathbb{T}^2 = \partial M_+ = \partial M_- = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

et leur réunion est \mathbb{S}^3 . Il est alors clair que \mathbb{S}^3 peut être obtenue en recollant M_+ et M_- le long de leur bord commun par le difféomorphisme $(z_1, z_2) \in \partial M_+ \rightarrow (z_2, z_1) \in \partial M_-$ *i.e.* on identifie (z_1, z_2) à (z_2, z_1) dans la réunion disjointe $M_+ \amalg M_-$: on recolle deux tores solides en identifiant un méridien du bord du premier à un parallèle du bord du second. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$.

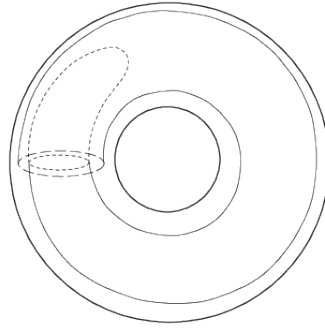
Notons t la deuxième coordonnée dans $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. La famille de surfaces $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ obtenue en translatant le graphe S de f le long de l'axe des t définit un feuilletage sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Si on rajoute le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, où \mathbb{S}^1 est vu comme le bord de \mathbb{D} , on obtient un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension 1 sur $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$.



Par construction même, $\tilde{\mathcal{F}}$ est invariant par les transformations $(z, t) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} \mapsto (z, t + 1) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ et induit donc un feuilletage \mathcal{F}_0 sur le quotient :

$$\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} / (z, t) \sim (z, t + 1) \simeq \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1.$$

Il a le bord $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ comme feuille compacte. Toutes les autres sont difféomorphes à \mathbb{R}^2 (cf. dessin ci-dessous).



Comme les morceaux M_+ et M_- sont difféomorphes à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, \mathcal{F}_0 définit sur M_+ et M_- respectivement deux feuilletages \mathcal{F}_+ et \mathcal{F}_- ; leur recollement le long de la feuille compacte \mathbb{T}^2 donne un feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{S}^3 appelé *feuilletage de Reeb*. Toutes les feuilles sont difféomorphes au plan \mathbb{R}^2 à l'exception de celle qui provient des bords de M_+ et M_- qui est difféomorphe au tore \mathbb{T}^2 .

Le choix de la fonction $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$ pour définir le feuilletage intermédiaire sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ par les surfaces S_t n'est pas anodin. Le fait que son graphe soit infiniment tangent à la feuille $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ du bord de $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ permet de recoller les feuilletages \mathcal{F}_+ et \mathcal{F}_- de manière C^∞ en le feuilletage de Reeb sur \mathbb{S}^3 (mais qui ne saurait être analytique par le théorème de Haefliger).

La référence [8] est une bonne présentation de tout ce qui a été fait en théorie des feuilletages depuis sa naissance jusque à peu près 1990, avec une bibliographie bien fournie et une préface de Georges Reeb.

2.2 Cohomologie feuilletée

Soit \mathcal{F} un feuilletage de dimension m sur M . On note $T\mathcal{F}$ son fibré tangent, $T^*\mathcal{F}$ son dual (fibré cotangent à \mathcal{F}) et $\Lambda^\ell T^*\mathcal{F}$ le fibré des ℓ -formes extérieures. Une section de $\Lambda^\ell T^*\mathcal{F}$ est appelée *forme feuilletée* de degré ℓ sur (M, \mathcal{F}) . (Rappelons qu'une *section* d'un fibré vectoriel $\tau : E \rightarrow M$ est une application différentiable $\alpha : M \rightarrow E$ telle que, pour tout $x \in M$, on ait $\alpha(x) \in E_x$ (fibre de E en x) et $\tau(\alpha(x)) = x$.) On note $\Omega_{\mathcal{F}}^\ell(M)$ l'espace vectoriel des ℓ -formes feuilletées. Pour $\ell = 0$, $\Omega_{\mathcal{F}}^0(M)$ est l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M . On a un opérateur de différentiation extérieure le long des feuilles $\Omega_{\mathcal{F}}^\ell(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{\ell+1}(M)$ défini (comme dans le cas classique), pour X_0, \dots, X_ℓ tangents à \mathcal{F} , par la formule :

$$d_{\mathcal{F}}\alpha(X_0, \dots, X_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_\ell) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_\ell)$$

où \widehat{X}_i signifie qu'on a omis l'argument X_i . On vérifie facilement que $d_{\mathcal{F}}$ est de carré nul. On obtient ainsi un complexe différentiel (dit *complexe feuilleté* de (M, \mathcal{F})) :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^0(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^1(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^m(M) \longrightarrow 0.$$

Sa cohomologie en degré ℓ , $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)/B_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$, est appelée *cohomologie feuilletée* de (M, \mathcal{F}) .

Une fonction f sur M basique vérifie $d_{\mathcal{F}}f = 0$, c'est-à-dire elle est constante sur les feuilles. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ admet une résolution fine (cf. [18])

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^0 \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^1 \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^m \longrightarrow 0$$

où $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}$ est le faisceau des germes des ℓ -formes feuilletées. Comme $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$ est l'espace des sections globales de $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}$, on a un isomorphisme canonique :

$$H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) \simeq H^{\ell}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}).$$

Les deux définitions permettent de faire des calculs, chacune a son utilité suivant la nature des exemples et la manière dont ils sont décrits. Mais c'est plutôt la version "faisceau" que nous utiliserons le plus dans la suite.

2.3 Suite spectrale d'un \mathbb{Z} -revêtement feuilleté

Soit \widetilde{M} une variété munie d'un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. Un *automorphisme* de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un difféomorphisme $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ envoyant feuille sur feuille. L'ensemble $\text{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}})$ de tels automorphismes est un groupe pour la composition des applications.

Une *action fidèle* du groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ sur $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ est la donnée d'un morphisme injectif $\Gamma \simeq \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}})$, donc de l'image γ de l'élément 1 (générateur du groupe \mathbb{Z}). Si cette action est libre et propre, le quotient $M = \widetilde{M}/\langle \gamma \rangle$ est une variété de même dimension que \widetilde{M} ; $\widetilde{\mathcal{F}}$ y induit alors un feuilletage \mathcal{F} de même dimension (et donc de même codimension). La projection canonique $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un *revêtement feuilleté* i.e. un revêtement qui, en plus, envoie toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur une feuille de \mathcal{F} .

De ce qui précède on déduit que l'image réciproque $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ par π du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est le faisceau $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$. On a donc une suite spectrale de terme :

$$E_2^{pq} = H^p(\Gamma, H^q(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

et convergeant vers $H^{p+q}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. (L'espace vectoriel $H^q(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ est vu comme Γ -module pour l'action induite par celle de $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ sur \widetilde{M} .) Comme $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, la différentielle $d_2 : E_2^{pq} \rightarrow E_2^{p+2, q-1}$ est nulle et donc la suite spectrale stationne au terme E_2 . Ce qui donne, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = E_2^{0\ell} \oplus E_2^{1, \ell-1}$. En particulier :

$$H_{\mathcal{F}}^0(M) = H^0(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = \{\text{fonctions basiques } \Gamma\text{-invariantes sur } \widetilde{M}\}. \quad (2.1)$$

$$H_{\mathcal{F}}^1(M) = E_2^{01} \oplus E_2^{10} = H^0(\Gamma, H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \quad (2.2)$$

Si en plus $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un flot (et donc aussi \mathcal{F}), les espaces vectoriels $H^*(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ et $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ sont nuls pour $* \geq 2$ et donc la cohomologie feuilletée $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ se réduit à celle donnée par les formules (2.1) et (2.2). Ce sera le cas pour le flot affine de Reeb, objet de cette note.

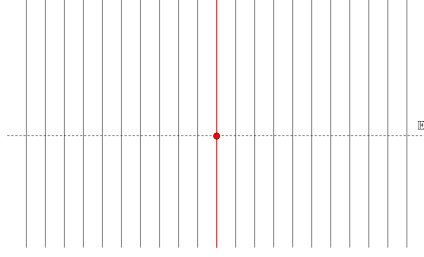
2.4 Construction du flot affine de Reeb

Pour $n \geq 2$ entier naturel, on note \mathbb{E} l'espace euclidien \mathbb{R}^n et (z, t) les coordonnées d'un point quelconque de $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$. On pose $\mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus \{0\}$ et $\widetilde{M} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

2.4.1. Le système différentiel $dz = 0$ définit un feuilletage (un flot) $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur \widetilde{M} ; ses feuilles sont les courbes intégrales du champ de vecteur $\widetilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$. De la même manière, l'équation différentielle $dt = 0$ définit un feuilletage $\widetilde{\mathcal{V}}$ de codimension 1.

– Toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ passant par (z, t) avec $z \neq 0$ est une droite; les autres sont deux demi-droites $\widetilde{F}_+ = \{(0, t) : t > 0\}$ et $\widetilde{F}_- = \{(0, t) : t < 0\}$.

– Toute feuille de $\widetilde{\mathcal{V}}$ passant par (z, t) avec $t \neq 0$ est une copie de l'espace \mathbb{E} . Celle qui reste (qui passe par les $(z, 0)$), qu'on notera \widetilde{V} , est isomorphe à \mathbb{E}^* .



2.4.2. Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $\widetilde{M} \xrightarrow{\gamma} \widetilde{M}$ la transformation affine $\gamma(z, t) = (\lambda z, \lambda t)$; elle engendre une action analytique de $\Gamma = \langle \gamma \rangle = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ sur \widetilde{M} . Cette action est libre et propre; le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est donc une variété. Celle-ci est compacte, et plus précisément analytiquement isomorphe à la variété de Hopf réelle $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. Les feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}$ sont invariants par γ et induisent respectivement des feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{V} sur M .

– Les feuilles F_+ et F_- de \mathcal{F} provenant respectivement de \widetilde{F}_+ et \widetilde{F}_- sont des cercles (courbes fermées simples). Les autres sont des courbes non fermées; pour chacune d’elles, un bout spirale autour de F_+ et l’autre autour de F_- . Le feuilletage \mathcal{F} est connu comme étant le *flot affine de Reeb* sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$.

– La feuille V de \mathcal{V} provenant de \widetilde{V} est une variété analytique isomorphe à la variété de Hopf $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Les autres feuilles sont difféomorphes à \mathbb{E} . Le feuilletage \mathcal{V} est connu comme étant le *feuilletage affine de Reeb* sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. On peut mettre sur la variété $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ une métrique riemannienne Θ de telle sorte que les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{V} soient orthogonaux. Il suffit d’en définir une sur \widetilde{M} invariante par γ , par exemple :

$$\Theta = \frac{1}{\|z\|^2 + t^2} (dz_1 \otimes dz_1 + \cdots + dz_n \otimes dz_n + dt \otimes dt)$$

où $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}$ est la norme euclidienne de z dans \mathbb{E} . Pour cette métrique, les deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{V} sont conformes.

3 Cohomologie feuilletée de (M, \mathcal{F})

Ceci est la section principale de ce travail dans laquelle on calcule explicitement la cohomologie feuilletée du feuilletage \mathcal{F} sur la variété $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. Plus précisément, on démontre le :

Théorème 3.1. *La cohomologie feuilletée $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$ du flot affine de Reeb \mathcal{F} sur la variété de Hopf $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ est \mathbb{C} pour $\ell = 0$ et est isomorphe (en tant qu’espace de Fréchet) à $C^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ pour $\ell = 1$. (Et bien sûr, $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = 0$ pour $\ell \geq 2$.)*

Pour $\ell \geq 2$, on a $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = 0$ pour une raison évidente de degré. D’autre part, il est facile de voir que $H_{\mathcal{F}}^0(M) = \mathbb{C}$. Cela vient du fait que toute feuille non compacte de \mathcal{F} spirale positivement sur F_+ et négativement sur F_- ; donc une fonction basique (continue) est nécessairement constante. Toute la suite de ce texte sera consacrée à la démonstration de l’isomorphisme $H_{\mathcal{F}}^1(M) \simeq C^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$. Elle se fera en trois étapes.

3.0.1. Dans l’hyperplan affine de $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ d’équation $t = 1$, on note B_+ la boule fermée de centre $(0, 1)$ et de rayon un nombre $\rho > 0$ et C_+ le cône fermé de base B_+ . De même, dans l’hyperplan affine d’équation $t = -1$, on considère la boule B_- de centre $(0, -1)$ et de rayon $\rho > 0$ et C_- le cône fermé de base B_- . On pose :

$$U_+ = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus C_-, \quad U_- = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus C_+ \quad \text{et} \quad U = U_+ \cap U_-.$$

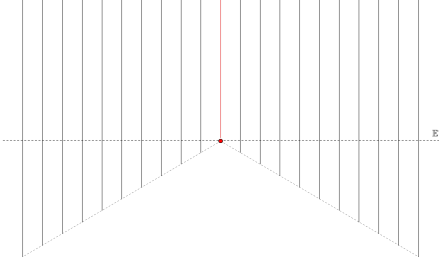
Alors $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$ est un recouvrement ouvert de \widetilde{M} . Les feuilletages induits par $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur U_+ et U_- sont isomorphes au feuilletage sur $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ défini par la première projection $(z, t) \rightarrow z$. Ils sont donc *intégrablement homotopes* (cf. [5]) au feuilletage par points sur l’espace euclidien \mathbb{E} . De la même manière, le feuilletage induit par $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur U est isomorphe au feuilletage sur $\mathbb{E}^* \times \mathbb{R}$ défini par la première projection $(z, t) \rightarrow z$. Il est donc *intégrablement homotope* au feuilletage par points sur \mathbb{E}^* . Leurs cohomologies feuilletées respectives sont donc triviales; plus précisément on a :

$$H_{\mathcal{F}}^{\ell}(U_+) = H_{\mathcal{F}}^{\ell}(U_-) = \begin{cases} C^{\infty}(\mathbb{E}) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

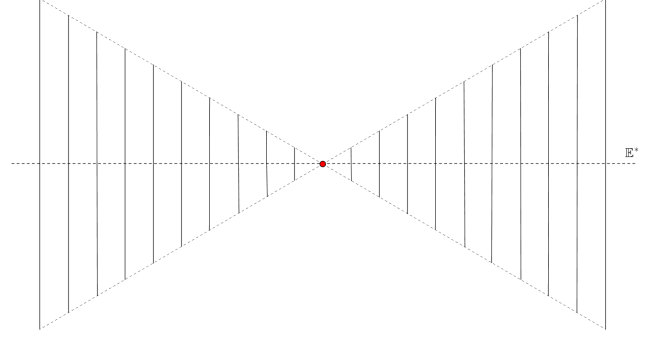
et

$$H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\ell}(U) = \begin{cases} C^{\infty}(\mathbb{E}^*) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

Voici par exemple les ouverts U_+ et U (U_- est obtenu simplement en appliquant à U_+ la réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $t = 0$).



L'ouvert U_+



l'ouvert U

Le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$ est donc acyclique pour le faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$. Par suite :

$$H_{\tilde{\mathcal{F}}}^*(\tilde{M}) = H^*(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}) = H^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}).$$

3.0.2. On peut alors utiliser le recouvrement ouvert $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ -acyclique \mathcal{U} pour calculer la cohomologie feuilletée de $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée s'écrit :

$$0 \longrightarrow H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(\tilde{M}) \xrightarrow{r} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U_+) \oplus H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U_-) \xrightarrow{j} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U) \xrightarrow{\delta} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \longrightarrow 0$$

où $r(f) = (f|_{U_+}, f|_{U_-})$ (qu'on notera (f, f)), $j(g, h) = g|_U - h|_U$ (qu'on notera $g - h$) et δ est l'homomorphisme de connexion. Cette suite exacte s'écrit plus précisément :

$$0 \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{E}) \xrightarrow{r} C^{\infty}(\mathbb{E}) \oplus C^{\infty}(\mathbb{E}) \xrightarrow{j} C^{\infty}(\mathbb{E}^*) \xrightarrow{\delta} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

toujours avec $r(f) = (f, f)$ et $j(g, h) = g - h$. L'image de r est un sous-espace fermé de $C^{\infty}(\mathbb{E}) \oplus C^{\infty}(\mathbb{E})$ isomorphe à $C^{\infty}(\mathbb{E})$; il a pour supplémentaire le facteur $(C^{\infty}(\mathbb{E}), 0)$ puisque tout (g, h) s'écrit de façon unique $(g, h) = (h, h) + (g - h, 0)$. En plus, ce facteur est l'image de j dans $C^{\infty}(\mathbb{E}^*)$. On a donc un isomorphisme canonique :

$$(15) \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \simeq C^{\infty}(\mathbb{E}^*)/C^{\infty}(\mathbb{E}).$$

Pour simplifier, on notera dorénavant W l'espace $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \simeq C^{\infty}(\mathbb{E}^*)/C^{\infty}(\mathbb{E})$. Muni de la topologie quotient, W hérite d'une structure d'espace vectoriel topologique non séparé puisque $C^{\infty}(\mathbb{E})$ est un sous-espace non fermé de $C^{\infty}(\mathbb{E}^*)$ (cf. Section 5 de l'Appendice 1).

3.0.3. Comme l'ouvert \mathbb{E}^* est invariant par l'homothétie $\gamma(z) = \lambda z$, γ agit sur $C^{\infty}(\mathbb{E}^*)$ en préservant $C^{\infty}(\mathbb{E})$ donc aussi sur le quotient $W = C^{\infty}(\mathbb{E}^*)/C^{\infty}(\mathbb{E})$; par suite W est un Γ -module. On a donc une suite exacte de Γ -modules $0 \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{E}) \xrightarrow{j} C^{\infty}(\mathbb{E}^*) \xrightarrow{\tau} W \longrightarrow 0$, où j est l'application dans la suite (3.1) et τ la projection canonique de $C^{\infty}(\mathbb{E}^*)$ sur le quotient W . En prenant la cohomologie de Γ à valeurs dans chacun de ces Γ -modules, on obtient une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\Gamma, C^{\infty}(\mathbb{E})) \xrightarrow{j^*} H^0(\Gamma, C^{\infty}(\mathbb{E}^*)) \xrightarrow{\tau^*} H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, C^{\infty}(\mathbb{E})) \xrightarrow{j^*} H^1(\Gamma, C^{\infty}(\mathbb{E}^*)) \xrightarrow{\tau^*} H^1(\Gamma, W) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

où δ est l'homomorphisme de connexion habituel. Reste à déterminer les espaces en question, nous aurons bien besoin de certains d'entre eux pour la suite.

- L'espace $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$ est celui des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{E} invariantes par γ , donc constantes ; par suite $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E})) = \mathbb{C}$.

- L'espace $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*))$ est celui des fonctions C^∞ sur \mathbb{E}^* invariantes par γ , donc les fonctions sur $V = \mathbb{E}^*/\langle\gamma\rangle = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ i.e. :

$$H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

- Calculons l'espace $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$. C'est le quotient de $C^\infty(\mathbb{E})$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $f - f \circ \gamma$. Nous avons donc à résoudre l'équation cohomologique $f(z) - f(\lambda z) = g(z)$ pour $g \in C^\infty(\mathbb{E})$ donnée. Une condition nécessaire est $g(0) = 0$. Si on la suppose satisfaite, une solution formelle est donnée par la série :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\lambda^k z).$$

Cette série converge pour $z = 0$, puisque tous ses termes sont nuls. D'autre part, on montre facilement que, pour tout $R > 0$, toutes ses séries dérivées sont équivalentes, sur la boule fermée de rayon R et centrée à l'origine, à des séries géométriques de raison une puissance de λ , donc elles convergent. Finalement, cette série converge pour la topologie C^∞ . Ce qui montre que f est C^∞ et est une solution de l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$. Ceci montre que la condition nécessaire et suffisante pour que notre équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ admette une solution est $g(0) = 0$. On en déduit que $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$ est de dimension 1 sur \mathbb{C} engendré par la fonction constante égale à 1.

- Pour calculer $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*))$, on utilise le Γ -revêtement $\sigma : \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ où $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ est le quotient de \mathbb{E}^* (vu comme la feuille $\tilde{V} = \mathbb{E}^* \times \{0\}$ du feuilletage \mathcal{V} décrit dans la sous-section 3.0.1) par l'action du groupe $\Gamma = \langle\gamma\rangle$. Notons \mathcal{C}^* et \mathcal{C} les faisceaux des germes de fonctions C^∞ respectivement sur \mathbb{E}^* et $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Ces faisceaux sont fins et donc :

$$H^\ell(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{E}^*) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad H^\ell(V, \mathcal{C}) = \begin{cases} C^\infty(V) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

Au revêtement σ est associée une suite spectrale convergeant vers $H^{p+q}(V, \mathcal{C})$ et de terme $D_2^{pq} = H^p(\Gamma, H^q(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*))$. Comme :

$$0 = H^1(V, \mathcal{C}) = H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) \oplus H^0(\Gamma, H^1(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*)),$$

on a $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = 0$.

- Avec ce qu'on vient de calculer, la suite exacte longue de cohomologie (3.2) peut donc s'écrire :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Elle donne la suite exacte (plus courte) $0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{C} \longrightarrow H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \mathbb{C} \longrightarrow 0$ qui montre que :

$$H^0(\Gamma, W) = (C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

- Pour finir, la suite spectrale associée au revêtement feuilleté $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ donne :

$$H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(M) = H^0(\Gamma, H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M})) \oplus H^1(\Gamma, H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(\tilde{M})).$$

Mais, comme on vient de le voir dans tous les calculs qui précèdent, on a $H^1(\Gamma, H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(\tilde{M})) = H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = 0$ et $H^0(\Gamma, H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M})) = H^0(\Gamma, W) \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$. Finalement on a le résultat annoncé $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(M) \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$. Ce qui termine la démonstration du théorème 3.1.

Remarque 3.2. Le théorème 3.1. dit que l'espace de cohomologie feuilletée $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1)$ est paramétré par les fonctions de classe C^∞ sur la feuille compacte $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ du feuilletage orthogonal \mathcal{V} . Cette feuille est presque une section de \mathcal{F} : elle coupe une et une seule fois chacune des feuilles de \mathcal{F} sauf F_+ et F_- . Si on prive M de F_+ et F_- , on obtient une variété M_0 munie du feuilletage induit \mathcal{F}_0 . Le revêtement universel \tilde{M}_0 de M_0 est le produit $\mathbb{E}^* \times \mathbb{R}$ et le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_0$ relevé a pour feuilles les facteurs $\{z\} \times \mathbb{R}$ avec $z \in \mathbb{E}^*$. Si on munit $\tilde{V}_0 = \mathbb{E}^* \times \{0\}$

du feuilletage par points (qu'on notera \mathcal{P}_0), on a une rétraction feuilletée $H((z, t), s) = (z, st)$ (avec $s \in [0, 1]$) de $(\widetilde{M}_0, \widetilde{\mathcal{F}}_0)$ sur $(\widetilde{V}_0, \mathcal{P}_0)$. Elle est équivariante par rapport à l'action de γ mais ne préserve pas chaque feuille individuellement ; elle ne saurait donc être une rétraction intégrable. Toutefois, elle le devient quand on prend les quotients respectifs sous l'action de Γ . Ainsi, le feuilletage \mathcal{F}_0 sur M_0 est intégrablement homotope au feuilletage par points sur $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Donc $H_{\mathcal{F}_0}^1(M_0) = 0$.

4 Distributions invariantes

4.0.1. Si \mathcal{F} est un flot défini par un champ non singulier X sur une variété M , sa cohomologie feuilletée peut se voir comme suit. Soit ν un sous-fibré supplémentaire à \mathcal{F} dans TM . Soit χ la 1-forme différentielle telle que $\chi(X) = 1$ et $\chi|_{\nu} = 0$. Il est facile de voir que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = \begin{cases} C^{\infty}(M) & \text{si } \ell = 0 \\ C^{\infty}(M) \otimes \chi & \text{si } \ell = 1 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 2 \end{cases}$$

et que le complexe feuilleté se réduit à : $0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^0(M) \xrightarrow{d_X} \Omega_{\mathcal{F}}^1(M) \longrightarrow 0$ où d_X est l'opérateur défini par $d_X f = (X \cdot f) \otimes \chi$. Son conoyau $\Omega_{\mathcal{F}}^1(M)/\text{Im}d_X$ est exactement le premier espace de *cohomologie feuilletée* $H_{\mathcal{F}}^1(M)$ de \mathcal{F} . Il ne dépend pas du champ qui le définit : on vérifie aisément, en exhibant explicitement un isomorphisme de complexes feuilletés, qu'on obtient la même cohomologie si on remplace le champ X par un champ $Z = hX$ avec h fonction partout non nulle.

Le calcul de l'espace $H_{\mathcal{F}}^1(M)$ revient à la résolution de l'équation cohomologique continue pour le champ X (cf. [4]) :

$$\text{Étant donnée } g \in C^{\infty}(M), \text{ existe-t-il } f \in C^{\infty}(M) \text{ telle que } X \cdot f = g ? \quad (4.1)$$

L'espace $H_{\mathcal{F}}^1(M)$ contient exactement les obstructions à la résolution de cette équation, d'où l'intérêt de son calcul.

4.0.2. Supposons M compacte. Une *distribution* sur M est une forme linéaire continue

$$\varphi \in C^{\infty}(M) \xrightarrow{T} \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

i.e. un élément du dual topologique $\mathcal{D}'(M)$ de $C^{\infty}(M)$. L'espace vectoriel $\mathcal{D}'(M)$ sera muni de la *topologie faible* *i.e.* la topologie la moins fine qui rend continues toutes les évaluations linéaires $e_{\varphi} : T \in \mathcal{D}'(M) \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$. Toute forme volume μ sur M définit une injection $f \in C^{\infty}(M) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(M)$ donnée par $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_M (f\varphi)\mu$. Une distribution de ce type est dite *régulière*.

Soit $M \xrightarrow{\gamma} M$ un difféomorphisme. Une distribution T sur M est dite *invariante* par γ (ou simplement *γ -invariante*) si elle vérifie $\langle T, \varphi \circ \gamma \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction $\varphi \in C^{\infty}(M)$. On dira que T est invariante par un groupe Γ de difféomorphismes de M (ou Γ -invariante) si elle est invariante par chacun de ses éléments.

4.0.3. Soit X un champ de vecteurs sur M . C'est aussi un opérateur différentiel du premier ordre (on l'a déjà considéré ainsi) $X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ défini par l'égalité $(X \cdot f)(x) = d_x f(X_x)$. Il admet une extension naturelle aux distributions :

$$X : T \in \mathcal{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathcal{D}'(M)$$

avec $\langle X \cdot T, \varphi \rangle = -\langle T, X \cdot \varphi \rangle$. (On peut donc s'intéresser aussi à la résolution de l'équation cohomologique continue au niveau des distributions $X \cdot T = S$.)

Une distribution T est dite *invariante* par X ou *X -invariante* si elle vérifie $X \cdot T = 0$ *i.e.* elle est nulle sur l'image de $X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ qui est l'espace des *divergences* de X . Une condition nécessaire pour que l'équation (4.1) admette une solution f est $\langle T, g \rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par X . Mais elle n'est pas suffisante en général : voir à cet effet le cas d'un flot linéaire de Liouville sur le tore \mathbb{T}^n traité par exemple dans ([4] page 1112).

L'espace $\mathcal{D}'_X(M)$ des distributions invariantes par X s'identifie donc au dual topologique de l'espace $H_{\mathcal{F}}^1(M)$. En effet, comme une distribution invariante est nulle sur les fonctions de la forme $f - f \circ \gamma$, elle est nulle sur l'espace $\{f - f \circ \gamma : f \in C^{\infty}(M)\}$ et donc induit une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel quotient $C^{\infty}(M)/\{f - f \circ \gamma : f \in C^{\infty}(M)\}$ qui n'est rien d'autre que l'espace $H_{\mathcal{F}}^1(M)$.

Revenons à notre flot \mathcal{F} sur la variété de Hopf $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. Il peut être défini par n'importe quel champ non singulier dont les feuilles sont les courbes intégrales. Un tel champ s'écrit en coordonnées sur \widetilde{M} sous la forme $\widetilde{X} = a(z, t) \frac{\partial}{\partial t}$ où a est une fonction C^{∞} partout non nulle et vérifiant la condition d'invariance $a(\lambda z, \lambda t) = \lambda a(z, t)$, par exemple $a(z, t) = \sqrt{\|z\|^2 + t^2}$. Du théorème 3.1 on tire donc le :

Corollaire 4.1. *Pour un champ X définissant le feuilletage \mathcal{F} , l'espace $\mathcal{D}'_X(M)$ des distributions X -invariantes est naturellement isomorphe au dual topologique de $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1) = C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$, donc à l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

5 Appendice 1

Il est bien connu que le premier groupe de cohomologie feuilletée d'un flot linéaire sur le tore \mathbb{T}^2 à pente un irrationnel de Liouville est un espace vectoriel topologique non séparé. Et souvent, quand la question se pose à cet effet, curieusement tout le monde cite cet exemple! Mais ça peut se produire même lorsque les feuilles sont fermées et que le feuilletage est presque une fibration, c'est le cas du feuilletage $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$: on a vu que $H^1_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ s'identifie au quotient $C^\infty(\mathbb{E}^*)/C^\infty(\mathbb{E})$ dont nous avons affirmé qu'il n'est pas séparé. L'objet de cet appendice est de justifier cela en montrant que l'espace $C^\infty(\mathbb{E})$ n'est pas fermé dans $C^\infty(\mathbb{E}^*)$.

5.1 L'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{E}^*)$

Soient λ un nombre réel tel que $\lambda > 1$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k la couronne de \mathbb{E}^* donnée par $C_k = \{z \in \mathbb{E} : \lambda^{-k} \leq \|z\| \leq \lambda^k\}$. Alors la famille $\{C_k\}$ est une suite croissante de compacts telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \mathbb{E}^*$. Pour un multi-indice $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|s| = s_1 + \dots + s_n$ sa longueur et D^s l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{|s|}}{\partial^{s_1} z_1 \dots \partial^{s_n} z_n}$. Pour $k, r \in \mathbb{N}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{E}^*)$, on pose :

$$\rho_{k,r}(f) = \sum_{|s| \leq r} \sup_{z \in C_k} |D^s f(z)|.$$

On obtient ainsi une famille dénombrable filtrante de semi-normes sur l'espace $C^\infty(\mathbb{E}^*)$. Elle y définit une topologie \mathcal{T} qui en fait un espace de Fréchet. Une suite de fonctions f_p dans $C^\infty(\mathbb{E}^*)$ converge vers $f \in C^\infty(\mathbb{E}^*)$ au sens de cette topologie si, pour tous $k, r \in \mathbb{N}$, la suite numérique $\rho_{k,r}(f_p - f)$ (indexée par p) tend vers 0.

5.2 Le sous-espace $C^\infty(\mathbb{E})$ n'est pas fermé dans $C^\infty(\mathbb{E}^*)$

Pour le montrer, nous allons exhiber explicitement une suite de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{E})$ qui converge au sens de la topologie \mathcal{T} vers une fonction f dans $C^\infty(\mathbb{E}^*) \setminus C^\infty(\mathbb{E})$. Soit $\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ ne se prolongeant pas en fonction C^∞ sur $[0, +\infty[$. (On peut penser par exemple à $\phi(t) = \sqrt{t}$, $\phi(t) = \frac{1}{t}$ ou...) On pose :

$$(25) \quad f(z) = \phi(\|z\|^2) \quad \text{et} \quad f_p(z) = \phi\left(\|z\|^2 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*.$$

Il est évident que, pour tout $p \geq 1$, la fonction f_p est dans $C^\infty(\mathbb{E})$; par contre f est dans $C^\infty(\mathbb{E}^*)$ mais pas dans $C^\infty(\mathbb{E})$. On va indiquer rapidement comment montrer que la suite (f_p) converge vers f pour la topologie \mathcal{T} . Un calcul facile mais lourd montre que, pour tout $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$D^s f(z) = \sum_{\ell=0}^{|s|} a_\ell(z) \phi^{(\ell)}(\|z\|^2) \quad \text{et} \quad D^s f_p(z) = \sum_{\ell=0}^{|s|} a_\ell(z) \phi^{(\ell)}\left(\|z\|^2 + \frac{1}{p}\right)$$

où a_ℓ est une fonction polynomiale en z_1, \dots, z_n et $\phi^{(\ell)}$ désigne la dérivée d'ordre ℓ de la fonction ϕ (sur $]0, +\infty[$ bien sûr). On se met sur l'un des compacts C_k . Là, encore une fois, un calcul facile mais un peu long, usant du théorème des accroissements finis appliqué à chacune des fonctions $\phi^{(\ell)}$ sur l'intervalle $\left[\|z\|^2, \|z\|^2 + \frac{1}{p}\right]$ donne :

$$\sup_{z \in C_k} |D^s f_p(z) - D^s f(z)| \leq \left\{ \sum_{\ell=0}^{|s|} \left(\sup_{z \in C_k} |a_\ell(z)| \right) \left(\sup_{z \in C_k} |\phi^{(\ell+1)}(z)| \right) \right\} \frac{1}{p}.$$

D'où :

$$(26) \quad \rho_{k,r}(f_p - f) \leq \left\{ \sum_{|s| \leq r} \sum_{\ell=0}^{|s|} \left(\sup_{z \in C_k} |a_\ell(z)| \right) \left(\sup_{z \in C_k} |\phi^{(\ell+1)}(z)| \right) \right\} \frac{1}{p} \leq \frac{C}{p}$$

où C est une constante strictement positive qui ne dépend que de ϕ , k et r . Ceci montre que f_p converge vers f pour toute semi-norme $\rho_{k,r}$. Autrement dit, la suite (f_p) converge vers f pour la topologie \mathcal{T} .

Ceci montre que le sous-espace $C^\infty(E)$ n'est pas fermé dans $C^\infty(E^*)$ et donc $C^\infty(E^*)/C^\infty(E)$ (muni de la topologie quotient) est un espace vectoriel topologique non séparé.

6 Appendice 2

On y donne succinctement la définition qu'on utilise de la cohomologie d'un groupe discret Γ à valeurs dans un Γ -module vectoriel.

Soit A un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (qui sera toujours \mathbb{R} ou \mathbb{C}) sur lequel un groupe discret (et dénombrable) Γ agit par automorphismes (et en fait donc un Γ -module). Pour tout entier $p \geq 1$ soit $C^p(\Gamma, A)$ l'espace vectoriel des applications de Γ^p (produit cartésien $\Gamma \times \cdots \times \Gamma$) dans A ; un élément de $C^p(\Gamma, A)$ est appelé p -cochaîne sur Γ à valeurs dans A . Par convention $C^0(\Gamma, A) = A$. On définit une application linéaire $d : C^p(\Gamma, A) \rightarrow C^{p+1}(\Gamma, A)$ par :

$$dc(\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}) = \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \dots, \gamma_{p+1}) + \sum_{i=1}^p (-1)^i c(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \dots, \gamma_{p+1}) + (-1)^{p+1} c(\gamma_1, \dots, \gamma_p).$$

Ceci est un opérateur de bord, i.e. $d^2 = 0$, et on définit de façon usuelle les espaces vectoriels de *cohomologie* de Γ à valeurs dans le Γ -module A par $H^p(\Gamma, A) = \ker d / \text{Im} d$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Exemple 6.1. Pour un élément a de $C^0(\Gamma, A) = A$, on a $da(\gamma) = \gamma \cdot a - a$. Donc $H^0(\Gamma, A)$ est le sous-espace A_Γ des vecteurs $a \in A$ invariants par l'action de Γ .

Exemple 6.2. Cas du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par un automorphisme γ de A , on montre que (voir par exemple le livre [9]) :

$$H^p(\Gamma, A) = \begin{cases} A_\Gamma & \text{pour } p = 0 \\ A / \langle a - \gamma \cdot a \rangle & \text{pour } p = 1 \\ 0 & \text{pour } p \geq 2 \end{cases}$$

où $\langle a - \gamma \cdot a \rangle$ est le sous-espace vectoriel de A engendré par les éléments de la forme $a - \gamma \cdot a$ avec a variant dans A . La détermination de $H^1(\Gamma, A)$ revient donc à résoudre l'équation suivante (dite *équation cohomologique* de l'automorphisme γ) :

$$\text{Étant donné } b \in A, \text{ existe-t-il } a \in A \text{ tel que } a - \gamma \cdot a = b?$$

Finalement, à toute suite exacte courte de Γ -modules vectoriels $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ est associée une suite exacte longue de cohomologie :

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p(\Gamma, A') \xrightarrow{\varphi^*} H^p(\Gamma, A) \xrightarrow{\psi^*} H^p(\Gamma, A'') \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(\Gamma, A') \xrightarrow{\varphi^*} \cdots$$

On en a vu l'utilité dans nos calculs. Pour tout ce qui tourne autour de cela, et surtout le morphisme de connexion δ , le lecteur peut consulter ([9], page 25).

REMERCIEMENTS : Merci aux deux référés qui ont examiné cet article pour les petites coquilles qu'ils m'ont signalées dans une première version.

Références

- [1] A. Asaoka, *Deformation of locally free actions and leafwise cohomology*. *Foliations : Dynamics, Geometry and Topology*, by M. Asaoka, A. El Kacimi Alaoui, S. Hurder and K. Richardson. Edited by J. Alvarez Lopez and M. Nicolau. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser (2014).
- [2] R. Bott, L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. GTM 82, Springer (1982).
- [3] T. Duchamp, M. Kalka, *Deformation theory for holomorphic foliations*. *J. of Diff. Geom.* **14**, (1979), 317-337.
- [4] A. Deghan-Nezhad, A. El Kacimi Alaoui, *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. *Journal of the Math. Society of Japan*, **59**, 4, (2007), 1105-1134.

- [5] A. El Kacimi Alaoui, *Sur la cohomologie feuilletée*. Compositio Mathematica **49**, (1983), 195-215.
- [6] A. El Kacimi Alaoui, A. Tihami, *Cohomologie bigraduée de certains feuilletages*. Bulletin de la Soc. Math. de Belgique Fasc. 2, **38** (1986), 144-157.
- [7] J. Girbau, A. Haefliger, D. Sundararaman, *On deformations of transversely holomorphic foliations*. J. Für die reine und Angewandte Math., Band **345**, (1983), 122-147.
- [8] C. Godbillon, *Feuilletages - Études géométriques*. Birkhäuser, (1991).
- [9] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*. Textes Mathématiques, Cedric/Fernand Nathan, (1980).
- [10] R.S. Hamilton, *Deformation Theory of foliations*. Preprint Cornell University, New-York, (1978).
- [11] S. Matsumoto, Y. Mitsumatsu, *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23**, (2003), 1839-1866.
- [12] P. Molino, *Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable*. Topology **12**, (1973), 317-325.
- [13] M.A. Mostow, *Continuous cohomology of spaces with two topologies*. Memoirs of the American Mathematical Society Number 175.
- [14] B.L. Reinhart, *Harmonic integrals on almost product manifolds*. Trans. AMS **88** (1958), 243-276.
- [15] C. Roger, *Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages*. Thèse d'État, (1976).
- [16] K.S. Sarkaria, *The de Rham Cohomology of Foliated Manifolds*. Thesis, Stony Brook (1974).
- [17] D. Sullivan, *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*. Invent. Math. **36**, (1978), 225-255.
- [18] I. Vaisman, *Cohomology and Differential Forms*. M. Dekker, (1973).

Aziz El Kacimi Alaoui
UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS-DE-FRANCE,
LMI (LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR),
F-59313 VALENCIENNES CEDEX 9, FRANCE.
E-mail address: aziz.elkacimi@uphf.fr